

# Aspects théoriques du TP laser Hélium-Néon

— Lasers, Matériaux, Milieux Biologiques —

## 1 Laser Hélium-Néon

Un laser est constitué d'un milieu amplificateur placé dans une cavité Fabry-Pérot de longueur fixe. Le laser émettant des ondes qui doivent être à la fois amplifiées par le milieu à gain et résonnantes dans la cavité, il émet en général un peigne de modes. L'écart entre deux fréquences successives est appelé **intervalle spectral libre**.

### 1.1 Modes longitudinaux d'une cavité laser

Une cavité laser est susceptible d'osciller sur plusieurs fréquences, appelées modes longitudinaux. Ces modes doivent pouvoir à la fois être amplifiés par le milieu à gain et être résonnants dans la cavité du laser.

**Quelle que soit la cavité considérée**, la condition de résonance est réalisée lorsque le déphasage de l'onde laser est identique à lui-même (modulo  $2\pi$ ) après un tour complet dans la cavité.

#### 1.1.1 Cas d'une cavité quelconque

**Dans le cas d'une cavité linéaire quelconque** (non confocale), la condition de résonance s'écrit :

$$2L = m\lambda = \frac{mc}{\nu}$$

où  $L$  est la longueur de la cavité,  $\lambda$  la longueur d'onde,  $\nu$  la fréquence et  $m$  (appelé l'ordre) un nombre entier. La fréquence  $\nu_m$  du mode longitudinal correspondant à l'ordre  $m$  est donc

$$\nu_m = \frac{mc}{2L} \quad (1)$$

On appelle **intervalle spectral libre** de la cavité laser l'intervalle entre les fréquences de résonance correspondant à deux ordres consécutifs. Pour une cavité de longueur  $L$ , il vaut

$$\text{ISL} \equiv \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2L} \quad (2)$$

#### 1.1.2 Cas particulier d'une cavité confocale

Une cavité Fabry-Pérot confocale est formée de deux miroirs de rayon de courbure  $R$ , séparés de la distance  $L = R$ . Le centre de la cavité est donc le foyer commun des deux miroirs (d'où le nom confocal).

Ce type de Fabry-Pérot présente la propriété particulière suivante : **tout rayon parallèle à l'axe se reboucle sur lui-même après un trajet en « 8 » de longueur  $4L$** . Le Fabry-Pérot confocal est donc **facile à aligner** car les rayons n'ont pas besoin d'être confondus avec l'axe optique.

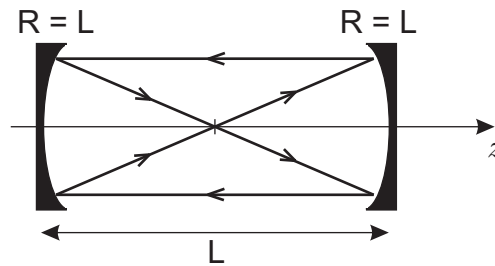


FIGURE 1 – Cavité confocale.

À résonance, le déphasage de l'onde sur le trajet en « 8 » doit être un multiple de  $2\pi$ , ce qui donne la condition de résonance suivante :

$$4L = m\lambda \quad \text{donc} \quad \nu_m = \frac{mc}{4L}$$

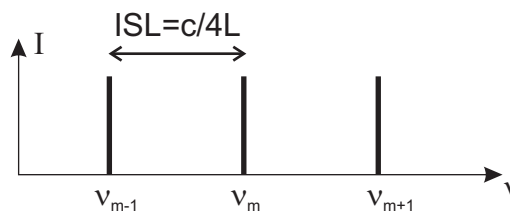


FIGURE 2 – Fréquences émises par un laser à cavité confocale.

Il y a donc deux fois plus de modes résonnants dans une cavité laser confocale que dans une cavité non confocale de même longueur. Cela provient du fait que même des rayons non parallèles à l'axe optique peuvent résonner dans la cavité. L'intervalle spectral libre s'écrit donc cette fois :

$$ISL \equiv \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{4L}$$

## 1.2 Faisceaux gaussiens TEM<sub>00</sub>

Un laser en cavité linéaire à miroir plan ou sphérique, tel que le laser Hélium-Néon de ce TP, émet la plupart du temps sur le mode transverse TEM<sub>00</sub> dont nous rappelons ici les principales caractéristiques.

### 1.2.1 Définitions

On rappelle que le champ électrique d'une onde gaussienne TEM<sub>00</sub> s'écrit

$$\mathcal{E}(r, z, t) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \times \exp\left(i\frac{kr^2}{2R(z)}\right) \times \exp(-i\varphi_G(z)) \times \exp(i(kz - \omega t)) \quad (3)$$

- $w(z)$  est défini comme la **taille du faisceau** et vérifie l'équation

$$w(z) = w_0 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)^{1/2}$$

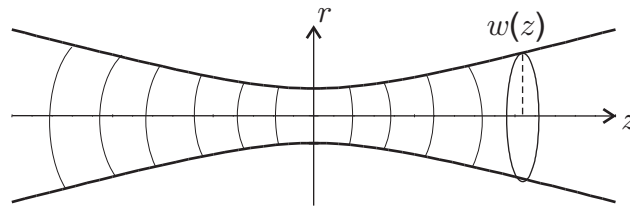


FIGURE 3 – Coupe longitudinale et section transverse du faisceau gaussien  $TEM_{00}$ . L'axe des  $z$  correspond à la direction de propagation du faisceau.

- $w_0$  est le rayon minimum du faisceau, on l'appelle col ou plus couramment **waist** en anglais.
- $z_R$ , la **longueur de Rayleigh**, vérifie la relation suivante (où  $k$  est le vecteur d'onde du faisceau)

$$z_R = \frac{kw_0^2}{2} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

- Le **rayon de courbure  $R(z)$  du front d'onde** varie en fonction de la distance  $z$  selon

$$R(z) = z \left( 1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right)$$

- $\varphi_G$  représente la **phase de Gouy** et vérifie

$$\tan \varphi_G = \frac{z}{z_R}$$

L'intensité  $I(r, z)$  du champ électrique s'écrit donc

$$I(r, z) = I_0(z) \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \quad \text{avec} \quad I_0(z) = |E_0|^2 \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 \quad (4)$$

### 1.2.2 Coupe transversale

Si on fait une coupe transversale du faisceau (à  $z = \text{cste}$ ), on peut représenter  $I$  en fonction de  $r$ . On peut définir plusieurs largeurs définies à plusieurs hauteurs :

- $w(z)$  représente la largeur en  $1/e^{1/2} \simeq 0,6$  de la gaussienne  $I(r)$ .
- $2w(z)$  représente la largeur en  $1/e^2 \simeq 0,13$  de la gaussienne  $I(r)$  (voir figure (4)).
- La largeur à mi-hauteur est égale à  $\sqrt{2 \ln 2} w(z)$ .

Si on représente la région de l'espace où l'intensité du faisceau est supérieure à  $I_0(z)/e^2$ , on obtient un disque de rayon  $w(z)$  (voir figure (4)) qui contient 86 % de l'énergie totale du faisceau. Le diamètre du faisceau est donc souvent défini comme  $2w(z)$ .

### 1.2.3 Coupe longitudinale

Dans la **zone de Rayleigh**,  $-z_R < z < z_R$ , le faisceau a un diamètre qui ne varie quasiment pas et qui est inférieur à  $\sqrt{2}(2w_0)$ . Le faisceau y est cylindrique et les surfaces d'onde sont pratiquement planes. On fait souvent l'approximation qu'il s'agit d'une **onde plane**.

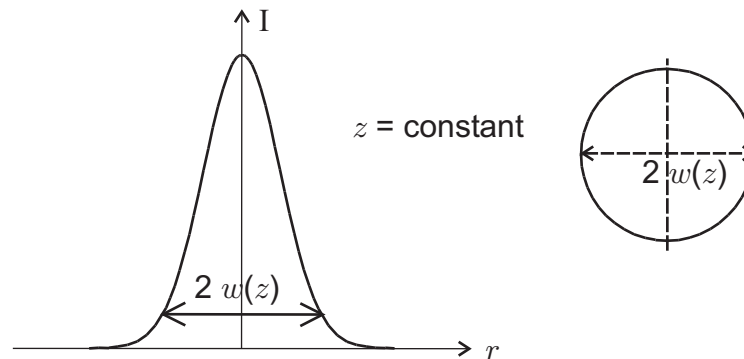
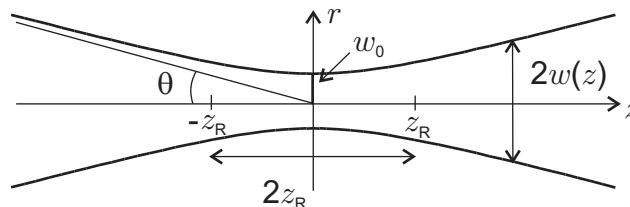
FIGURE 4 – Coupe transversale du faisceau gaussien à  $z$  constant.

FIGURE 5 – Waist et longueur de Rayleigh.

À **grande distance**, c'est-à-dire pour  $z \gg z_R$  (« champ lointain »),  $w(z)$  varie linéairement. Le faisceau prend une forme conique et les surfaces d'onde sont sphériques. On peut faire l'approximation qu'il s'agit d'une **onde sphérique**. On appelle divergence et on note  $\theta$  le demi-angle au sommet de ce cône :

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

Pour une **position intermédiaire**, entre la zone de Rayleigh et le champ lointain, l'**onde est purement gaussienne** et ne peut pas être approximée par une onde plane ou une onde sphérique. L'approximation consistant à utiliser l'optique géométrique à la place de l'optique gaussienne n'est alors plus valable.

#### 1.2.4 Faisceaux réels

En fait, une source laser « réelle » a une ouverture finie qui limite l'extension latérale de la distribution lumineuse. Ceci implique que les fronts d'onde ne sont jamais parfaitement sphériques.

Pour rendre compte de cet effet, les expressions de la divergence et de la taille du faisceau sont multipliées par un facteur, noté  $M^2$ , supérieur ou égal à 1. Il caractérise l'écart à la limite de diffraction ( $M^2 = 1$  correspond à la limite de diffraction). En d'autres termes,  $M^2$  représente l'écart entre la courbe de répartition transverse d'intensité du faisceau et une gaussienne idéale (voir figure 6).

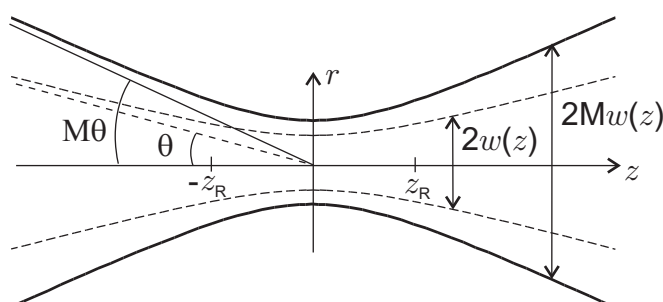


FIGURE 6 – Écart à la limite de diffraction.

### 1.2.5 Cas du laser Hélium-Néon

La forme des miroirs et la taille de la cavité imposent pour un laser les caractéristiques du mode  $TEM_{00}$  qui est susceptible d'être émis. En effet, le faisceau laser doit être tel que sa surface d'onde au niveau des miroirs épouse la forme des miroirs et donc que les rayons de courbure de l'onde gaussienne et du miroir soient égaux au niveau de ceux-ci (voir figure (7)).

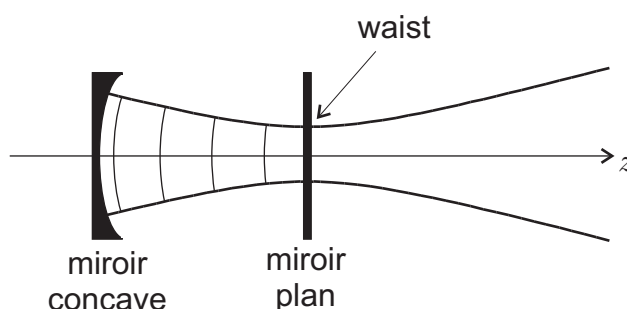


FIGURE 7 – Position du waist pour le laser Hélium-Néon en cavité plan-sphérique.

Par conséquent, on montre que pour un laser à cavité plan-sphérique, comme c'est le cas du laser Hélium-Néon utilisé dans ces TP, le mode  $TEM_{00}$  a son waist sur le miroir plan et que sa longueur de Rayleigh est égale à

$$z_R = \sqrt{L(R - L)} \quad (5)$$

où  $L$  est la longueur de la cavité et  $R$  le rayon de courbure du miroir sphérique.

## 1.3 Puissance de sortie

Le laser He-Ne est un laser à 4 niveaux dont le schéma de principe est représenté sur la figure (8). La transition laser se situe ici entre les niveaux 2 et 1.

$\gamma_{ij}$  correspond au taux de désexcitation spontanée du niveau  $i$  vers le niveau  $j$ , il s'exprime en  $s^{-1}$ . Les atomes sont pompés du niveau fondamental 0 vers le niveau 3 avec le taux de pompage  $W_{\text{pompe}}$  (en  $s^{-1}$ ).

Une fois dans le niveau 3, les atomes peuvent se désexciter spontanément vers le niveau 2 ou vers le niveau 0. Le temps de désexcitation spontanée  $\tau_{32} = 1/\gamma_{32}$  est supposé être très court devant tous les autres temps caractéristiques du système et en particulier devant  $\tau_{30} = 1/\gamma_{30}$ .

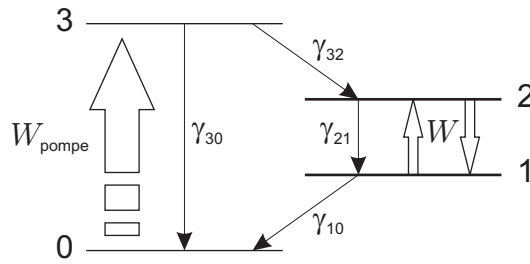


FIGURE 8 – Schéma du laser Hélium-Néon à 4 niveaux.

Les atomes sur le niveau 2 peuvent se désexciter vers le niveau 1 soit par émission spontanée, soit par émission stimulée avec le taux  $W_{21}$ . De même les atomes du niveau 1 peuvent soit être excités sur le niveau 2 avec le taux  $W_{12}$  en absorbant un photon, soit se désexciter par émission spontanée sur le niveau 0. On montre que  $W_{12} = W_{21} = W = BI$  où  $I$  est l'intensité intracavité et  $B$  le coefficient d'Einstein de cette transition. Celui-ci est relié à la section efficace  $\sigma$  d'émission stimulée de 2 vers 1 par la relation  $\sigma = \frac{2\hbar\omega}{\epsilon_0 c} B$ .

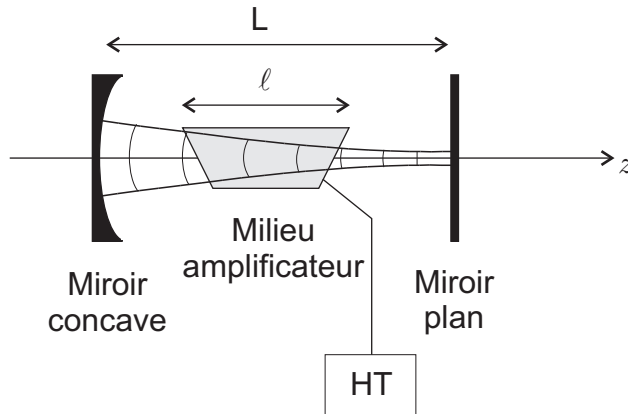


FIGURE 9 – Cavité laser de l'Hélium-Néon.

Pour le calcul de la puissance émise, on fait les hypothèses suivantes :

- On supposera que la réflectivité des miroirs est très proche de 1 et que ceux-ci sont sans pertes ( $R + T = 1$ ). D'autre part, on suppose  $T_c \ll T_p$ .
- On négligera les interférences entre l'onde se propageant dans un sens et celle se propageant dans l'autre sens à l'intérieur de la cavité. On supposera de plus que ces intensités sont égales et constantes sur la longueur de la cavité.
- Enfin, on se place en régime de pompage faible :  $\gamma_3 \equiv \gamma_{30} + \gamma_{32} \gg W_{\text{pompe}}$  et  $\gamma_{21} \gg W_{\text{pompe}}$ . Avec ces hypothèses, on peut trouver les solutions stationnaires des équations de population.

On montre en particulier que l'inversion de population s'écrit

$$D \equiv N_2 - N_1 \simeq \frac{W_{\text{pompe}}}{W + \gamma_{21}} N$$

où  $N = N_1 + N_2$  est la population totale.

Puis la relation  $W = BI$  nous permet d'exprimer l'inversion de population  $D$  en fonction de l'intensité intracavité  $I$  :

$$D = \frac{D_0}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}}} \quad \text{avec} \quad D_0 = \frac{NW_{\text{pompe}}}{\gamma_{21}} \quad \text{et} \quad I_{\text{sat}} = \frac{\gamma_{21}}{B} = \frac{2\hbar\omega}{\varepsilon_0 c \sigma} \gamma_{21}$$

Le gain linéique  $g$  s'écrit 
$$g = \frac{D\sigma}{S\ell}$$

où  $S$  représente la surface du faisceau. D'autre part, les pertes étant égales au gain dans l'état stationnaire, on a  $g\ell = T$ ; on peut alors exprimer l'intensité intracavité comme

$$I = I_{\text{sat}} \left( \frac{g_0\ell}{T} - 1 \right)$$

où  $g_0$  est le gain linéique non saturé, pour  $I = 0$ . Enfin, la puissance émise  $P_{\text{out}}$  s'exprime en fonction de l'intensité sortant  $I_{\text{out}} = \frac{1}{2} TI$  comme

$$P_{\text{out}} = \frac{\varepsilon_0 c}{2} SI_{\text{out}} = \frac{hcS}{2\lambda\tau_{21}\sigma} (g_0\ell - T)$$

On peut finalement exprimer cette puissance en faisant intervenir la longueur de Rayleigh  $z_R$  de la cavité :

$$P_{\text{out}} = \frac{hc z_R}{2\tau_{21}\sigma} (g_0\ell - T)$$

On donne pour le milieu amplificateur  $\sigma = 3 \times 10^{-17} \text{ m}^2$  et  $\tau_{21} = 1/\gamma_{21} = 2 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ .

## 2 Modes gaussiens dans un Fabry-Pérot

### 2.1 Modes $\text{TEM}_{pq}$ d'une cavité laser Fabry-Pérot quelconque

#### 2.1.1 Définition d'un mode $\text{TEM}_{pq}$

La description des parties (1.1) et (1.2) (en particulier l'équation (3)) est un peu simplifiée car elle ne tient pas compte de la structure transverse des modes. A partir de maintenant, on ne se limite plus au cas d'un mode  $\text{TEM}_{00}$  mais on s'intéresse aussi aux **modes de Hermite-Gauss**  $\text{TEM}_{pq}$  où  $(p+1)$  est le nombre de maxima lumineux dans la direction transverse  $x$  et  $(q+1)$  le nombre de maxima lumineux dans la direction transverse  $y$ . Compte tenu de leur structure transverse, les modes  $\text{TEM}_{pq}$  possèdent une phase dite phase de Gouy qui est proportionnelle à  $(p+q+1)$ .



FIGURE 10 – Répartition transverse d'intensité des modes  $\text{TEM}_{00}$  et  $\text{TEM}_{12}$

### 2.1.2 Conditions de résonance d'une cavité laser

Certains lasers sont susceptibles d'émettre non seulement un mode transverse  $TEM_{00}$ , mais aussi des modes transverse  $TEM_{pq}$ . Ce n'est pas le cas du laser Hélium-Néon mais c'est le cas du laser Nd :YAG par exemple. Dans ce cas, les fréquences de résonance  $\nu_{mpq}$  de ces modes transverse généralisent l'expression (1)

$$\nu_{mpq} = \frac{c}{2L} \left( m + (p + q + 1)\varepsilon \right) \quad (6)$$

où  $m$  est l'indice relatif au mode longitudinal et le terme  $(p + q + 1)\varepsilon$  est dû à la phase de Gouy :

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \left( \arctan \left( \frac{z_2}{z_R} \right) - \arctan \left( \frac{z_1}{z_R} \right) \right)$$

avec  $z_1$  et  $z_2$  les coordonnées des miroirs par rapport au waist du faisceau selon la direction de propagation, et  $z_R$  désigne la longueur de Rayleigh de la cavité.

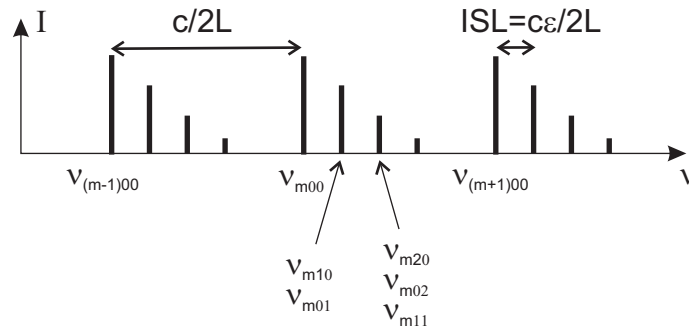


FIGURE 11 – Fréquences de résonance pour une cavité laser non confocale.

Un mode  $TEM_{pq}$  avec  $p + q \neq 0$  n'aura donc pas la même fréquence que le mode  $TEM_{00}$  (voir figure (11)). En particulier, en présence de modes transverse, l'intervalle spectral libre, c'est-à-dire la différence de fréquence entre deux pics de résonance successifs s'écrit désormais :

$$ISL = \frac{c\varepsilon}{2L}$$

### 2.1.3 Cas particulier d'une cavité laser confocale

Pour une cavité laser confocale de longueur  $L$ , on montre facilement que le waist est au centre de la cavité (pour des raisons de symétrie). Ainsi,  $z_R = -z_1 = z_2 = L/2$  et donc  $\varepsilon = 1/2$ . Il y a donc résonance :

- pour les modes pairs  $p + q = 2n$  lorsque la fréquence vérifie

$$\nu_{mpq} = \frac{c}{2L} \left( m + \frac{1}{2}(2n + 1) \right)$$

- pour les modes impairs  $p + q = 2n + 1$  lorsque la fréquence vérifie

$$\nu_{mpq} = \frac{c}{2L} (m + n + 1)$$

On observe une dégénérescence des modes pairs d'une part et impairs d'autre part (voir figure (12)), car  $\nu_{mpq} = \nu_{(m-1)(p+1)(q+1)} = \nu_{(m-1)(p+2)q} = \dots$



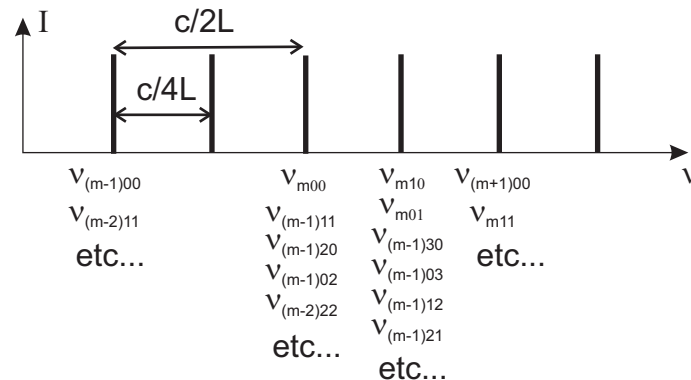


FIGURE 12 – Fréquences de résonance pour une cavité laser confocale.

## 2.2 Application au Fabry-Pérot analyseur de mode

### 2.2.1 Principe général

On a vu dans la partie précédente qu'une cavité Fabry-Pérot de **longueur fixe** était susceptible de résonner pour **quelques fréquences seulement**. On va maintenant utiliser ce principe et retourner le point de vue pour utiliser une cavité Fabry-Pérot comme un analyseur de fréquence (on parle aussi d'analyseur de modes).

Supposons donc que l'on dispose d'une radiation (par exemple celle créée par le laser Hélium-Néon) dont on veuille étudier le spectre que l'on suppose pour simplifier constitué de plusieurs fréquences  $\nu_1, \nu_2, \text{etc.}$  L'idée est alors d'éclairer sous **incidence normale** une cavité Fabry-Pérot dont on module légèrement la longueur  $d$  autour d'une valeur moyenne  $d_0$ .

On mesure ensuite la **lumière transmise à travers la cavité**. Toutes les fois qu'une fréquence  $\nu_i$  coïncide avec une des fréquences de résonance de la cavité, c'est-à-dire lorsque la distance  $d$  est telle que (6) est satisfait pour une des fréquences  $\nu_i$ , on aura une intensité transmise maximale.

Afin d'éviter que trop de modes de la cavité ne résonnent, il est judicieux de se placer dans le régime de dégénérescence et de choisir ainsi une cavité Fabry-Pérot confocale (comparer les figures (11) et (12) qui donnent les fréquences de résonance). Lorsque l'on est dans cette situation, on parle alors de **cavité analyseur de modes**.

Pour que la cavité reste le plus possible confocale, il est nécessaire que la modulation de la longueur de la cavité soit petite devant le rayon de courbure des miroirs. Dans la pratique, cette modulation est de l'ordre de quelques longueurs d'onde (donc quelques micromètres).

### 2.2.2 L'analyseur de modes (AM) éclairé en lumière monochromatique

Pour illustrer la discussion précédente, considérons une onde incidente monochromatique de fréquence  $\nu_0$  et une cavité Fabry-Pérot confocale (analyseur de mode) de longueur  $d$  variable autour de  $d_0$ . On observe des résonances pour certaines longueurs de cavité  $d_{m,0}$  telles que (voir la partie (1.1.2))

$$d_{m,0} = m \frac{c}{4\nu_0} = m \frac{\lambda_0}{4}$$

où  $m$  est un entier caractérisant le mode longitudinal qui résonne. Notons que  $d_{m,0}$  est très proche de  $d_0$  car comme précisé plus haut, la variation de longueur est toujours supposée très petite devant  $d_0$  (au plus de l'ordre de quelques longueurs d'onde).

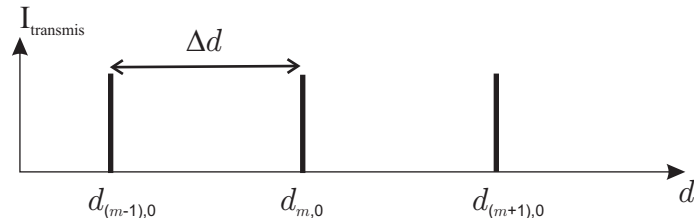


FIGURE 13 – Transmission d'un Fabry-Pérot confocal éclairé par une onde monochromatique.

Le graphe de l'intensité transmise est représenté sur la figure (13) (comparer à (2)).  $\Delta d = \lambda_0/4$  est la variation de longueur de la cavité permettant d'observer deux résonances successives du même mode  $\nu_0$ .

### 2.2.3 L'analyseur de modes (AM) éclairé en lumière polychromatique

On considère le cas où le faisceau incident est cette fois constitué de deux ondes de fréquences  $\nu_0$  et  $\nu_1$ . On observe des résonances pour les longueurs de cavité  $d_{m,0}$  et  $d_{m,1}$  telles que

$$d_{m,0} = m \frac{c}{4\nu_0} = m \frac{\lambda_0}{4} \quad \text{et} \quad d_{m,1} = m \frac{c}{4\nu_1} = m \frac{\lambda_1}{4}$$

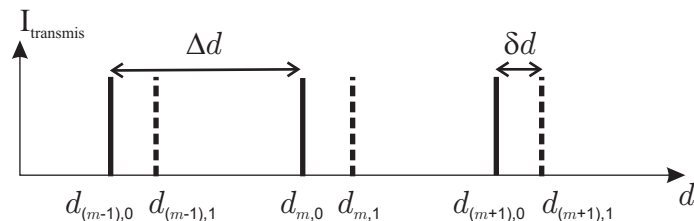


FIGURE 14 – Transmission d'un Fabry-Pérot confocal éclairé par une onde bichromatique.

Le graphe de l'intensité transmise est représenté figure (14).  $\delta d = m|\lambda_0 - \lambda_1|/4$  est la variation de longueur permettant d'observer deux résonances successives correspondant aux deux modes  $\nu_0$  et  $\nu_1$ .

Si  $\nu_0$  et  $\nu_1$  sont séparés par l'intervalle spectral libre  $c/4d_0$ , les deux modes résonnent pour les mêmes longueurs de cavité.

### 2.2.4 Performance de l'AM confocal

On montre que si  $0 < |\nu_1 - \nu_0| < \text{ISL}$ , alors

$$\frac{\delta d}{\Delta d} = \frac{|\nu_1 - \nu_0|}{\text{ISL}}$$

Le Fabry-Pérot confocal, dont on fait varier la longueur, permet donc de déterminer le contenu spectral d'une source lumineuse dont la largeur totale est inférieure à  $c/4d_0$ . Il permet

en particulier de voir si un laser est monomode ou multimode, d'où le terme « analyseur de modes » (AM).

### 2.2.5 Finesse de l'AM confocal

En réalité, on n'observe pas des pics de transmission infiniment fins comme ceux représentés sur les figures précédentes : ils ont une largeur à mi-hauteur notée  $\delta$ .

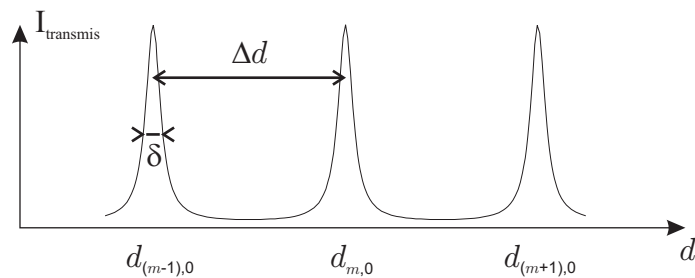


FIGURE 15 – Pics de transmission d'un Fabry-Pérot analyseur de modes.

On définit la finesse  $\mathcal{F}$  de la cavité par  $\mathcal{F} = \Delta d / \delta$ . Elle limite la résolution spectrale du Fabry-Pérot.

Pour  $d_0 = 37,5$  mm et  $\mathcal{F} = 150$  (valeur fournie par le constructeur), calculer l'intervalle spectral libre et l'écart en fréquence minimum  $\delta\nu$  que peut mesurer ce Fabry-Pérot confocal.

### 2.2.6 Analyseur de modes (AM) non confocal

La dégénérescence des modes pairs d'une part, impairs d'autre part, dépend de façon très critique de la distance entre les 2 miroirs de la cavité Fabry-Pérot : il faut être en position parfaitement confocale. Si ce n'est pas le cas, le signal transmis par l'analyseur de modes est plus difficile à interpréter car un même mode  $\nu_0$  fera résonner les modes transverses de la cavité pour de nombreuses distances  $d$ , ce qui fait apparaître une « forêt de pics ».

## 3 Adaptation de modes

Une cavité optique, qu'elle contienne ou non un milieu amplificateur, est caractérisée par son waist et sa longueur de Rayleigh. Il est possible de conjuguer les waists de deux cavités, par exemple ceux d'une cavité laser et d'une cavité d'analyse. On parle alors d'adaptation de modes (« mode matching » en anglais).

Le problème est le suivant : la cavité laser a un waist noté  $w_A$ , la cavité d'analyse un waist  $w_B$  et on souhaite conjuguer  $w_A$  et  $w_B$  par une lentille (voir figure 16). Quelles doivent être alors les valeurs de la distance focale de la lentille et des distances  $d_A$  et  $d_B$  qui figurent sur le schéma (16) ?

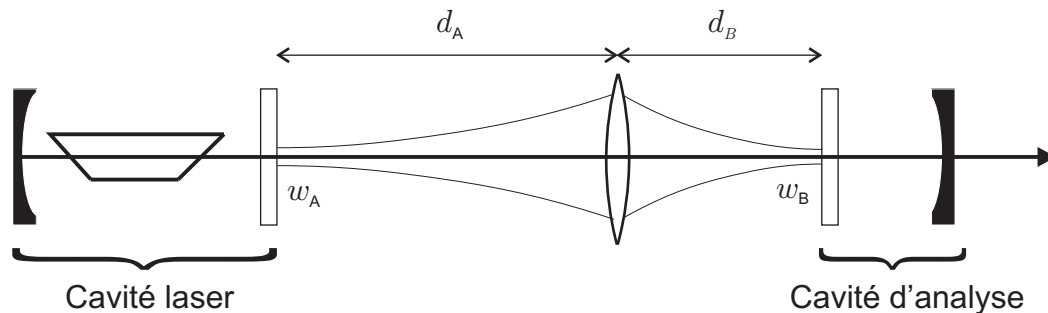


FIGURE 16 – Adaptation de deux cavités.

### 3.1 Les outils de l'optique gaussienne

#### 3.1.1 Paramètre $q$

Un faisceau gaussien est caractérisé, en un point de sa propagation, par le paramètre  $q$  :

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}$$

où  $R(z)$  est le rayon de courbure et  $w(z)$  le waist en  $z$ . Au niveau du waist  $w_0$ ,  $q$  est imaginaire pur et égal à :

$$q_0 = i \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = i z_R$$

#### 3.1.2 Matrice ABCD

Pour décrire l'évolution d'un faisceau dans l'approximation paraxiale (rayons lumineux proches de l'axe optique), on utilise le formalisme des matrices ABCD. Dans ce formalisme, on décrit la propagation d'un faisceau lumineux à travers différents milieux à l'aide de matrices.

Par exemple, la propagation sur une distance  $d$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La traversée d'une lentille de focale  $f$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$$

Il existe également des matrices ABCD pour décrire la réflexion sur un miroir ou la propagation à travers un milieu d'indice  $n$ .

#### 3.1.3 Transformation de $q$

Un faisceau caractérisé par  $q_1$  est transformé après son passage à travers différents éléments optiques en  $q_2$  tel que :

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$$

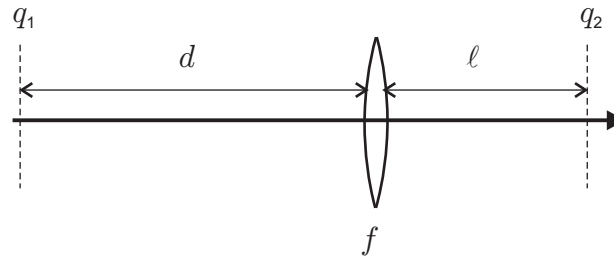


FIGURE 17 – Exemple de propagation d'un faisceau gaussien.

Par exemple, pour décrire l'évolution d'un faisceau caractérisé par  $q_1 (R_1, w_1)$  après propagation sur une distance  $d$ , passage d'une lentille de distance focale  $f$  et propagation sur une distance  $\ell$ , on multiplie les trois matrices correspondantes et on détermine  $q_2$  à partir de la nouvelle matrice ABCD ainsi obtenue :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis on applique

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$$

## 3.2 Cas de l'adaptation de deux cavités

### 3.2.1 Calcul des distance $d_A$ et $d_B$

On applique le résultat ci-dessus à la propagation sur une distance  $d_A$ , à la traversée d'une lentille de distance focale  $f$  et finalement à la propagation sur une distance  $d_B$  :

$$q_B = \frac{Aq_A + B}{Cq_A + D} = \frac{\left(1 - \frac{d_B}{f}\right) q_A + \left(d_A + d_B - \frac{d_A d_B}{f}\right)}{-\frac{q_A}{f} + \left(1 - \frac{d_A}{f}\right)} \quad (7)$$

$q_A$  et  $q_B$  sont respectivement les paramètres du laser et de la cavité en leur waist : ils sont donc imaginaires purs ( $q_{A,B} = i\pi w_{A,B}^2/\lambda$ ). En les remplaçant par leur expression dans l'équation (7) et en séparant parties réelle et imaginaire, on obtient :

pour la partie imaginaire 
$$\frac{d_A - f}{d_B - f} = \frac{w_A^2}{w_B^2} \quad (8)$$

pour la partie réelle 
$$(d_A - f)(d_B - f) = f^2 - f_0^2 \quad (9)$$

où on a défini 
$$f_0 = \frac{\pi w_A w_B}{\lambda} = \sqrt{z_{RA} z_{RB}}$$

En combinant les équations (8) et (9), on obtient  $d_A$  et  $d_B$  en fonction de  $f$  :

$$\begin{cases} d_A = f \pm \frac{w_A}{w_B} \sqrt{f^2 - f_0^2} \\ d_B = f \pm \frac{w_B}{w_A} \sqrt{f^2 - f_0^2} \end{cases}$$

Pour que ces distances soient réelles, il faut que  $f$  soit supérieure à  $f_0$ . **On ne peut donc réaliser l'adaptation qu'avec des lentilles de distance focale supérieure à  $f_0$ .**

### 3.2.2 Calcul des longueurs de Rayleigh et des waists des deux cavités

La cavité laser tout comme la cavité d'analyse est plan-concave. Sa longueur de Rayleigh est donc égale à  $z_R = \sqrt{L(R - L)}$  où  $L$  est la longueur de la cavité et  $R$  le rayon de courbure du miroir concave.

Les waists se déduisent de la relation  $w_0 = \sqrt{z_R \lambda / \pi}$ . On calcule donc les waists  $w_A$  et  $w_B$  à partir des caractéristiques géométriques des cavités et on en déduit les distances  $d_A$  et  $d_B$ ,  $f$  étant fixée.

### 3.3 Isolation optique

Un aspect critique du montage d'adaptation de modes consiste à éviter les retours de lumière dans la cavité laser, retours dus à des réflexions sur les surfaces des optiques. En effet, les retours de lumière perturbent la fréquence et la puissance lumineuse émise par le laser et, de ce fait, modifient le signal transmis par la cavité d'analyse. Pour limiter ces retours, on réalise une isolation optique. La méthode consiste à jouer sur la polarisation de la lumière pour éviter que la lumière réfléchi ne revienne sur le laser. On utilise un cube séparateur de polarisation et une lame quart d'onde. Le schéma expérimental est représenté sur la figure (18).

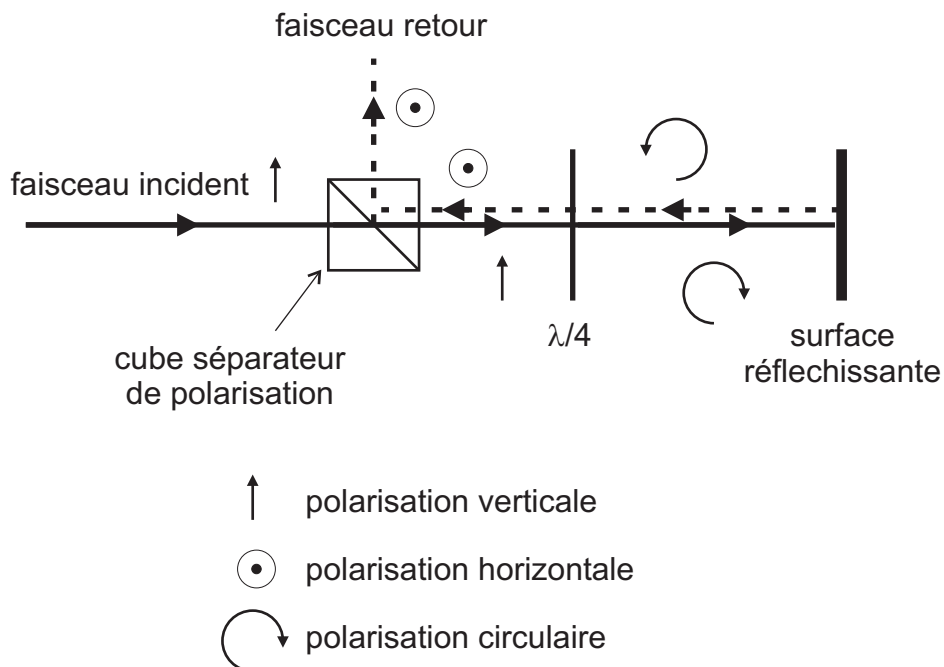


FIGURE 18 – Isolation optique.

Si le faisceau incident est de polarisation rectiligne verticale, il est presque totalement transmis par le cube séparateur de polarisation (aux imperfections du cube près). Il traverse ensuite

la lame quart d'onde dont les axes neutres ont été préalablement orientés à  $45^\circ$  de la polarisation verticale. L'onde est donc polarisée circulairement après la lame. Si elle est réfléchiée par un élément optique, **son hélicité s'inverse**. La polarisation de l'onde réfléchiée, en repassant dans la lame, redevient rectiligne mais perpendiculaire à la polarisation incidente, c'est-à-dire rectiligne horizontale. Elle est alors réfléchiée par le cube et ne revient donc pas dans la cavité laser.